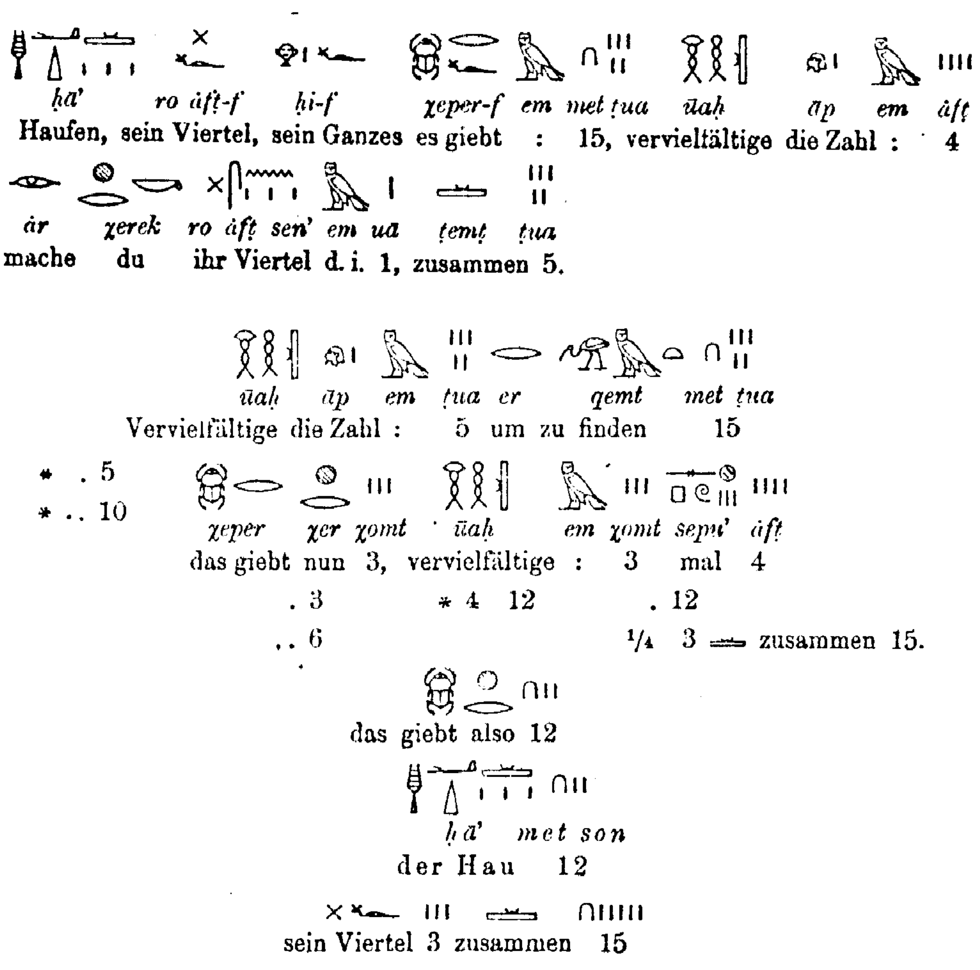
DIE AUFLÖSUNG VON ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN - EIN HISTORISCHER ABRISS

H.K.Kaiser, TU Wien

Gleichungen spielten bereits in der Frühzeit der Geschichte der Mathematik eine wesentliche Rolle bei der Behandlung praktischer Aufgaben. Bereits in vorgriechischer Zeit war man bei den Ägyptern mit dem Lösen von linearen Gleichungen in einer Unbekannten durchaus vertraut. Rechnungen dieser Art werden als "Hau-Rechnungen" bezeichnet. Das ägyptische Wort Hau ('h') bedeutet so viel wie Menge, Haufen. Aus dem Papyrus Rhind entnehme wir die folgende Augabe 26 (wesentlicher Bestandteil des Papyrus Rhind ist eine Aufgabensammlung): "Eine Menge und ihr Viertel sind zusammen 15".



Wie wir der Übersetzung des Lösungsweges entnehmen, wird die Lösung rezeptartig angegeben. Von manchen Mathematikhistorikern wird die Lösung als ein Beispiel für die Methode des einfachen falschen Ansatzes interpretiert.

Auch bei allen übrigen mathematischen Texten aus dem alten Ägypten, die Gleichungen beinhalten, findet sich stets nur ein Lösungsrezept.

Ebenso rezeptartig lösten die Babylonier ihre Gleichungen. Auch Beispiele quadratischer Gleichungen wurden von den Babyloniern rezeptartig gelöst. Ihre Lösungstechnik ist die übliche, nämlich die Ergänzung zu einem vollständigen Quadrat. Ein Beispiel entnehmen wir dem altbabylonischen Text BM 13901:

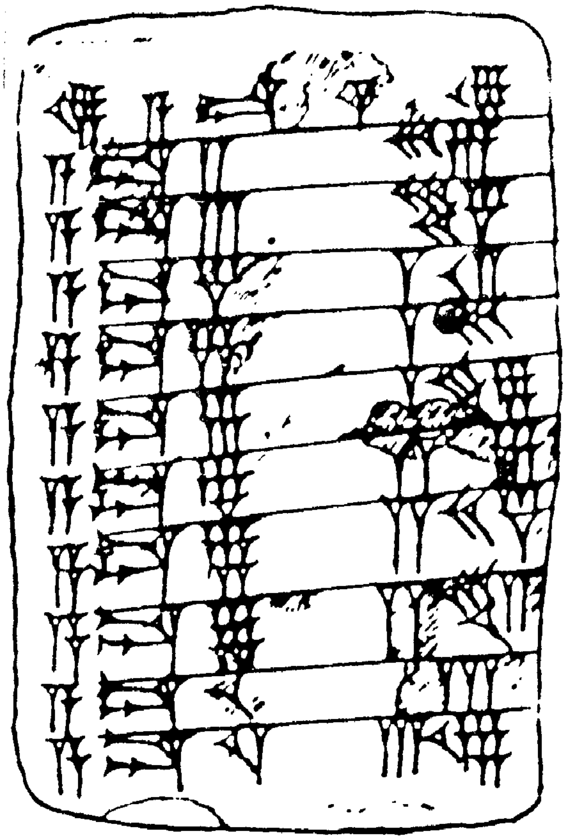
"Die Fläche und die Seite eines Quadrats habe ich addiert und 0;45 ist es."

Die Lösung wird durch folgendes Rezept angegeben (das natürlich im babylonischen Hexagesimalsystem geschrieben ist):
"1, den Koeffizienten nimmst du. Die Hälfte von 1 brichst du ab, 0;30 und 0;30 multiplizierst du. 0;15 zu 0;45 fügst du hinzu. Und 1 hat 1 als Quadratwurzel, 0;30, das du mit sich selbst multipliziert hast, von 1 subtrahierst du und 0;30 ist das Quadrat."

Hier wird also die Lösung der Gleichung $x^2+1.x=0;45$ beschrieben. Zunächst wird $\frac{1}{2}=0;30$ gebildet und quadriert: $(\frac{1}{2})^2=0;15$. Dann bildet man $(\frac{1}{2})^2+0,45=1$, zieht die Wurzel $\sqrt{(\frac{1}{2})^2+0,45}$ und zieht davon $\frac{1}{2}$ ab. Die gesuchte Größe ist also $x = \sqrt{(\frac{1}{2})^2+0,45}-\frac{1}{2}$.

Die Babylonier verwenden diese Lösungstechnik immer wieder, geben aber niemals eine Begründung oder gar einen Beweis für ihre Richtigkeit. Solche Überlegungen finden wir erst in der Mathematik des antiken Griechenlands.

Die antiken griechischen Mathematiker der klassischen Periode diskutierten verschiedene Typen quadratischer Gleichungen, natürlich auf geometrischem Weg. So formuliert etwa Euklid in der Proposition 11 aus dem zweiten Buch der "Elemente" folgende Aufgabe: "Eine gegebene Strecke ist so zu teilen, daß das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt dem Quadrat über dem anderen Abschnitt gleich ist".



Babylonische Einmaleins-Tafel für die Zahl 18 aus der Tempelbibliothek von Nippur um 1350 v. Chr.

Diese Aufgabe ist offensichtlich äquivalent zur Gleichung $x^2+ax=a^2$. Euklid gibt eine geometrische Konstruktion zur Lösung der Aufgabe an, die also gleichbedeutend mit dem Aufsuchen einer positiven reellen Wurzel der obigen Gleichung (a positiv, reell) ist. Die Ausführungen Euklids erscheinen uns heutigen Mathematikern zwar logisch präzise, aber doch in der Ausdrucksweise umständlich. Man erkennt daraus die Wichtigkeit einer adäquaten Symbolik für eine "Theorie des Auflösens von Gleichungen". Die ersten Ansätze zu einer geeigneten Symbolik entstanden bereits in der Mathematik der Griechen, allerdings nicht in ihrer Hochblüte, sondern in ihrer Spätzeit. Wir finden sie im Werk des Urvaters der Algebra: Diophant. In seiner "Arithmetika" finden wir als Einleitung die Einführung dieser Symbolik. Die ersten sechs Potenzen der Variablen x erhalten eigene Namen und Symbole. Zahlen, die nicht als Koeffizienten von Unbestimmten auftreten, heißen "Einheiten".

Auch für die reziproken Werte der Unbekannten führt Diophant Symbole ein, indem er negative Exponenten zuläßt. Die Zahlen werden durch die Buchstaben des griechischen Alphabets angegeben, über die ein Querstrich gezogen wird. Somit ist Diophant in der Lage, Polynome und Gleichungen symbolisch anzuschreiben. Das Wesen negativer Größen wird von Diophant bereits erfaßt. Er gibt folgende Vorzeichenregel an: "Das Produkt zweier verneinter Größen ist positiv, das Produkt einer verneinten und einer positiven Größe ist negativ."

Diophant erkennt klar die Notwendigkeit, die Grundoperationen zu beherrschen, um damit Gleichungen zu lösen. So schreibt er:

"Nachdem ich dir die Multiplikation der Potenzen und ihrer reziproken Werte erklärt habe, ist auch die Division dieser Ausdrücke klar. Für den Anfänger der Wissenschaft ist es nun gut, wenn er sich in der Addition, Subtratkion und Multiplikation algebraischer Ausdrücke übt. Er muß wissen, wie man positive Ausdrücke und negative Ausdrücke mit verschiedenen Koeffizienten zu anderen Ausdrücken hinzufügt, die selbst beide positiv oder auch positiv und negativ sein können, und wie man von Ausdrücken, die Summen oder Differenzen sein können, andere Größen wegnimmt, die ihrerseits Summen oder Differenzen sein können."

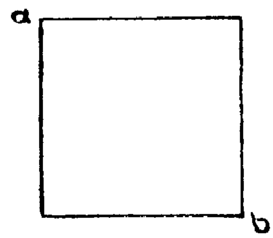
Die eigentliche Geburtsstunde der klassischen Algebra wird vielfach mit der Entstehung des Buches "al-gebr wa'l muqabala" des Al-Khwarizmi gleichgesetzt. Diese Algebra (der Titel des Buches hat ja dem ganzen Gebiet den Namen gegeben) ist ein Lehrbuch der praktischen Elementarmathematik. Nach den Worten des Autors enthält das Buch alles "was aus der Arithmetik überaus brauchbar ist, was Menschen bei Vererbungsangelegenheiten brauchen, bei Teilungsproblemen, bei Rechtsstreitigkeiten, im Handel, und überhaupt bei allen gegenseitigen Beziehungen; oder auch bei der Landvermessung, beim Graben von Kanälen, geometrischen Berechnungen und verschiedenen anderen Dingen."

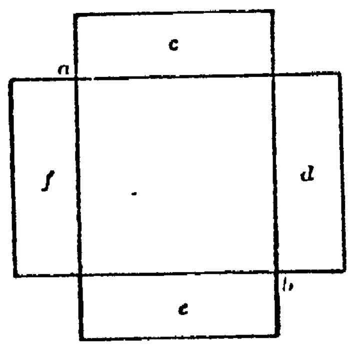
Herzstück des Buches ist die Behandlung der Gleichungen ersten und zweiten Grades von einem systematischen Standpunkt aus. Alle Gleichungen werden verbal ausgedrückt, es kommen keine eigenen Symbole vor. Zunächst führt Al Khwarizmi sechs kanonische Gleichungstypen ein, wobei die Koeffizienten stets positiv sind (also negative Zahlen und Null werden nicht als Koeffizienten zugelassen) und Gleichungen die keine positiven Lösungen haben, werden nicht betrachtet. Lösen der Gleichung bedeutet stets nur das Aufsuchen einer Lösung. Jeder dieser Gleichungstypen wird an Hand eines Standardbeispiels mittels einer Regel gelöst, die dann auf geometrischem Weg bewiesen wird. Zur Illustration für die Vorgangsweise des Al-Khwarizmi führen wir die Lösung der Gleichung $ax^2+bx=c$ (in unserer modernen Symbolik) vor. "Das folgende Beispiel ist ein Beispiel von Quadraten und Wurzeln gleich einer Zahl: Ein Quadrat und 10 Wurzeln ist gleich 39 Einheiten. Die Frage in diesem Typ von Gleichung ist daher folgende: welches Quadrat gibt zusammen mit 10 seiner Wurzel eine Summe von insgesamt 39? Die Lösungsmethode für diesem Typ von Gleichungen besteht darin, die Hälfte der Anzahl der Wurzeln zu nehmen. Die Anzahl der Wurzeln in unserer Aufgabe ist 10. Nimm deshalb 5, das mit sich selbst multipliziert 25 ergibt, einen Betrag, den du zu 39 dazuzählst. Das gibt 64. Davon ziehst du die Wurzel, das ist 8. Von diesem Wert ziehst du die Hälfte der Anzahl der Wurzeln, also 5, ab und du erhältst 3. Die Zahl 3 stellt eine Wurzel des gesuchten Quadrats dar, das selbst 9 ist. 9 gibt also das Quadrat an.

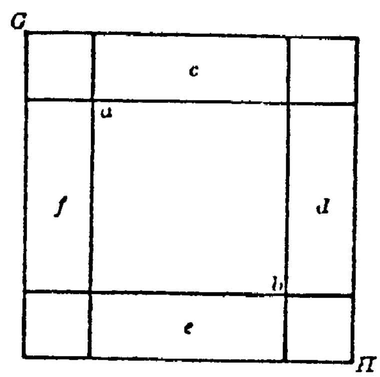
Auf ähnliche Weise, wieviele Quadrate auch immer gegeben sind, muß immer auf ein Quadrat reduziert werden.

Nachdem Al-Khwarizmi auf diese Weise die Lösungsrezepte für alle sechs Gleichungstypen angegeben hat, führt er für jeden Fall einzeln geometrische Beweise vor.

"Wir haben genug über die sechs Gleichungstypen gesagt, was die Zahlen betrifft. Nun ist es jedoch notwendig, auf geometrischem Weg die Richtigkeit von dem zu zeigen, was wir über die Probleme in Zahlen gesagt haben. Deshalb ist unsere erste Proposition jene, daß ein Quadrat und 10 Wurzeln gleich 39 Einheiten sind.







Zum Beweis konstruieren wir ein Quadrat mit unbekannter Seite, das das Quadrat repräsentiert, das wir mit seiner Wurzel finden wollen. Sei das Quadrat ab, dessen Seiten eine Wurzel darstellt. Wenn wir eine dieser Seiten mit einer Zahl multiplizieren ist es offensichtlich, daß das Ergebnis dieser Multiplikation eine Anzahl von Wurzeln ist, die gleich der Wurzel derselben Zahl ist. Da 10 Wurzeln mit dem Quadrat gegeben waren, nehmen wir den vierten Teil der Zahl 10 und legen an jede Seite des Quadrats eine Fläche äquidistanter Seiten, deren Länge gleich jener des konstruierten Quadrats und deren Breite $2\frac{1}{2}$ ist, dem vierten Teil von 10. Deshalb sind vier Flächen äquidistanter Seiten an das erste Quadrat ab angelegt. Jede dieser Flächen hat als Länge die Länge einer Wurzel des Quadrats ab und - wie wir gerade gesagt haben - die Breite $2\frac{1}{2}$.

Das sind die Flächen c,d,c,f. Die Größe der Fläche in jeder der vier Ecken, die man durch Multiplikation von $2\frac{1}{2}$ mit $2\frac{1}{2}$ findet, vervollständigt was von der größeren Fläche fehlt. Daher vervollständigen wir die Zeichnung der größeren Fläche durch Addition der vier Produkte, jedes $2\frac{1}{2}$ mal $2\frac{1}{2}$. Das Gesamte dieser Multiplikation ergibt 25.

Und nun ist es offensichtlich, daß das erste gezeichnete Quadrat, das das Quadrat der Unbekannten repräsentiert, und die vier darangelegten Flächen zusammen 39 ausmachen. Addieren wir dazu 25, das ist die Fläche der vier kleinen Quadrate, die in den vier Ecken des Quadrats plaziert wurden, so ist die Zeichnung des großen Quadrats, das wir mit GH bezeichnen, vervollständigt. Daher ist die Gesamtsumme 64, die Wurzel davon 8, und damit ist die Seite der vervollständigten Figur bestimmt. Ziehen wir also von 8 zweimal den vierten Teil von 10 ab, die an den Enden des großen Quadrats eingezeichnet sind, so bleibt 3 und dies ist gleich einer Seite des ersten Quadrats ab.

Diese Zahl 3 drückt daher eine Wurzel des gesuchten Quadrats der Unbekannten aus, und 9 ist das Quadrat selbst."

Nun führt Al-Khwarizmi aus, daß seine Regel zur Lösung dieses Gleichungstyps nichts anderes ist, als das Nachvollziehen des geometrischen Beweises. Auch gibt er dann noch einen zweiten geometrischen Beweis an.

Al-Khwarizmi gibt auch an, wie man jede gegebene Gleichung (ersten oder zweiten Grades) auf eine der sechs Standardformen bringt. Dies erreicht er mittels zweier Operationen, die er "al-jabr" und"al-Muqabala" nennt. Aus der ersteren ist ja der Name Algebra entstanden. "Al-jabr" bedeutet soviel wie Vervollständigen, Wiederherstellen, Ganzmachen. Diese Operation bedeutet das Hinüberschaffen eines negativen Ausdrucks auf die andere Seite der Gleichung. Hat man beispielsweise eine Gleichung (in moderner Schreibweise) $x^2=40-4x^2$, so ergibt die Anwendung der Operation "al-jabr" die Gleichung $5x^2=40x$.

Der Ausdruck "al-muqabala" bedeutet soviel wie Ausgleich. Gemeint ist damit der Prozeß der Reduktion positiver Ausdrücke derselben Potenz auf beiden Seiten der Gleichung. Ist eine Gleichung $50+x^2=29+10x$ gegeben, so erhält man durch die Operation "al-muqabala" die reduzierte Form $21+x^2=10x$.

Diese beiden Operationen mit den vier Grundoperationen die al-Khwarizmi auch für die verschiedenen Potenzen erklärt, erlauben es dem Autor, alle von ihm behandelten Probleme auf die Lösung der sechs Standardtypen zurückzuführen.

Mit Al-Khwarizmi hatte die arabische Algebra begonnen (um 830). Das Buch des Al-Khwarizmi wurde zu einem Standardwerk für die Behandlung linearer und quadratischer Gleichungen nicht nur bei der Arabern, sondern auch durch die Übersetzung ins Lateinische für die europäische Mathematik. Der Höhepunkt der "arabischen" Algebra wurde mit dem Buch "Über die Beweseie für die Probleme von al-jabr und al-muqabala" des Omar Khayyam (um 1100) erreicht. Die Aufgaben der Algebra beschreibt Omar Khayyam so:

"Ich sage, mit Gottes Hilfe und guter Anleitung, daß die Kunst des al-jabr und al-muqabala jene mathematische Kunst ist, deren Gegenstand die reine Zahl und die meßbare Größe ist, sofern sie zwar unbekannt ist, aber mit Hilfe der Addition zu einer bekannten Größe gefunden werden kann..."

Es wird also die Algebra als Lehre vom Auflösen von Gleichungen zwischen Polynomen mit positivem ganzzahligen Koeffizienten verstanden.

Für Omar Khayyam bedeutet die Auflösung von Gleichungen das Auffinden einer positiven reellen Lösung. Bei Gleichungen dritten Grades, die sich nicht mittels Division durch die Unbekannte auf Gleichungen zweiten Grades zurückführen lassen, gelingt ihm dies durch Angabe einer geometrischen Konstruktion unter Verwendung von Kegelschnitten. Omar Khayyam bemühte sich auch ein numerisches Verfahren für kubische Gleichungen zu finden, allerdings vergeblich. Er bemerkte dazu "Der Beweis dieser Formel für den Fall, daß der Gegenstand der Aufgabe eine absolute Zahl ist, ist weder für uns noch für irgendeinen anderen von denen, die diese Kunst beherrschen, möglich. Es könnte sein, daß jemand von denen, die nach uns kommen, dies erfahren wird.."

Omar Khayyam selbst erklärt uns, warum er auf den Gedanken kam, Gleichungen dritten Grades zu untersuchen. Das erste Problem, das auf eine Gleichung dritten Grades geführt hatte, stammt von Archimedes: "Man bestimme eine Ebene, die eine Kugel so teilt, daß die Volumina der Kugelabschnitte in einem vorgegebenen Verhältnis stehen"; daneben führte auch das Problem der Würfelverdoppelung auf eine Gleichungen dritten Grades. Auch einige Untersuchen der Araber in der Geometrie (wie etwa die Bestimmung der Seite eines regelmäßigen Neuneckes durch Al-Biruni (11 Jahrhundert)) und in der Physik führten auf Gleichungen dritten Grades. Ibn al-Haitham (um 1000) stieß bei seiner Beschäftigung mit der Optik sogar auf das Problem, eine Gleichung vierten Grades zu lösen. Diese Vielzahl von Problemen erregte das Bedürfnis nach einem systematischen Auflösungsverfahren.

Die numerische Lösung der kubischen Gleichung gelang erst den italienischen Algebraikern des Renaissancezeit. Die Lösung wurde erstmals von Cardano in seiner "Ars magna" publiziert (1545). In diesem Buch findet sich auch die Auflösungsformel für die allgemeine Gleichung vierten Grades, die von Cardanos Schüler und Schwiegersohn Ferrari entdeckt wurde. In der "Ars magna" stellt die Cardano die neuen Ideen auf dem Gebiet der Algebra dar. Neben den Auflösungsformeln diskutiert Cardano auch einige allgemeine Sätze, die auf das Lösen von Gleichungen vorbereiten. Diese Sätze befaßen sich mit der Reduktion des Grades einer Gleichung, mit der Umformung von Gleichungen in kanonische Gleichungstypen und mit der Anzahl der Lösungen von Gleichungen. Das Buch kann also als Ansatz zu einer allgemeinen Gleichungstheorie angesehen werden.

NICOLO TARTAGLIA

Über die Auffindung der Lösungsformel entstand ein heftiger Streit zwischen Cardano uns seinen Anhängern und Nicolo Tartaglia. Details darüber findet man in [1],[2].

Die Ausführungen Cardanos sind nach wie vor verbal aufgebaut. Die Entwicklung eines Symbolismus bringt erst das 17.Jahrhundert. Die Beweise für die Formeln werden in griechischer Tradition auf geometrischem Weg durchgeführt. Verwendet man unseren modernen

Symbolismus, so scheinen viele Überlegungen Cardanos trivial bis umständlich. Zur Lösung des Typs $x^3+ax^2+bx=c$ (in moderner Schreibweise) bringen wir durch Substitution mit $y=x+\frac{a}{3}$ die Gleichung auf die Gestalt $x^3+mx=n$ (wir setzen voraus: m,n positiv), also auf eine kubische Gleichung, in der das quadratische Glied fehlt. Cardanos Idee läuft nun darauf hinaus, die algebraische Identität $u^3-v^3=(u-v)^3+3uv(u-v)$ zur Lösung zu benützen. Er löst zunächst das Gleichungssystem: $3uv=m$

$$u^3-v^3=n,$$

und gelangt so zu der sogenannten Cardanoschen Formel:
Eine Lösung x_1 der Gleichung $x^3+mx=n$ (m,n positiv) ist gegeben durch:

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{(\frac{n}{2})^2+(\frac{m}{3})^3}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{(\frac{n}{2})^2+(\frac{m}{3})^3}}$$

Die Gleichung vierten Grades löst Cardano unter Berufung auf Ludovico Ferrari durch Zurückführung auf eine Gleichung dritten Grades. Man kann ja jede Gleichung vierten Grades durch eine geeignete Substitution auf eine Gleichung mit Anfangskoeffizienten 1 bringen, in der das kubische Glied fehlt. Das heißt, man braucht nur den Typ $x^4+px^2+q^2=rx$ besprechen (p,q,r positive Koeffizienten; Cardano führt die Lösung nur mit bestimmten Zahlen vor). Zunächst wird die linke Seite der Gleichung zu einem Quadrat gemacht, indem man zu beiden Seiten $(2q-p).x^2$ addiert. Das ergibt $x^4+2qx^2+q^2=sx^2+rx$, wobei die Abkürzung $2q-p=s$ eingeführt wird. Um nun zu erreichen, daß die rechte Seite ein Quadrat wird, wird auf beiden Seiten der Ausdruck $2kx^2+k^2+2kq$ addiert, wobei k eine Unbestimmte repräsentiert. Auf diese Weise gelangt man zur Gleichung $(x^2+(k+q))^2=(s+2k)x^2+rx+k^2+2kq$. Damit nun die rechte Seite ein Quadrat wird (wir wissen ja, daß Ax^2+Bx+C genau dann ein Quadrat eines linearen Ausdrucks ist, wenn

$B^2-4AC=0$ ist), muß man k so bestimmen, daß

$$r^2=4(s+2k)(k^2+2kq)$$

gilt. Dies ist eine Gleichung 3.Grades in k und diese konnte Cardano lösen.

Durch Einsetzen des so gewonnenen Wertes für k in obige Gleichung konnte Cardano auf beiden Seiten die Wurzel ziehen und die so entstehende Gleichung nach x auflösen. Damit war also eine Lösung der Ausgangsgleichung 4.Grades bestimmt.

Die folgenden Zeiten brachten weitere Auflösungsverfahren für die allgemeine Gleichungen 3. und 4.Grades, die allgemeine Gleichung 5. (und höheren)Grades widerstand allen Lösungsversuchen mittels Radikalen. Nach mehreren gescheiterten Lösungsversuchen bewies Abel die Unlösbarkeit der allgemeinen Gleichung 5.Grades durch Radikale, für Gleichungen von mindestens 5. aber sonst beliebigen Grades wurde der Beweis von Galois erbracht. Dies gelang ihm durch Schaffung einer Theorie, die wir heute noch nach ihm benennen. Diese Theorie stellt die Verbindung vom Gleichungslösen zur Gruppentheorie her. Somit bildet die Theorie der Lösung von Gleichungen einen der Ausgangspunkte für die Entwicklung der modernen Algebra.

Eine ausführliche Darstellung des eben besprochenen Gebietes findet sich in [3].

Literatur

[1] M.CANTOR: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik 1, Leipzig, 1907.

[2] H.EVES: An Introduction to the History of Mathematics Holt, Rinehart and Winston, London, 1976.

[3] H.KAISER-W.NÖBAUER: Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht Hölder-Pichler-Tempsky, Wien (erscheint Herbst 1983).

[4] L.KARPINSKI: Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of al-Khowarizmi New York, 1915.

[5] H.WINTER - W.ARAFAT: The algebra of Umar Khayyam J.R.Asiatic Soc.Bengal Science 16, 1 (1950) 27-77.

[6] T.R.WITMER: The Great Art of the Rules of Algebra London, 1968.